跡見学園女子大学マネジメント学部紀要　第３号　(2005年３月15日)

全要素生産性(TFP)に関する理論的考察

Theoretical Investigation On Total Factor Productivity

櫻　川　幸　恵

要　旨

全要素生産性（TFP）の計測の方法として、Solow（1957）によるソロー残差がある。本稿では、Solow の研究と、その後の Hall（1988、1990）や Basu and Fernald（1995）による、ソロー残差を用いた TFP の計測方法の修正を理論的に整理する。さまざまな規模に関する収穫の程度や市場の競争状態であるときには、生産額に対して粗生産額を用い、分配率に関しては費用ベースシェアを利用する方法が望ましいことが示される。

1　はじめに

全要素生産性（TFP）は、経済成長率を決定する主要な要因であるため、長期分析の経済成長理論において、その大きさを測定することが重要視されてきた。また、観測される生産性が景気拡張期に高く景気減退期において低いという、順循環的な性質を保有していることが認められるようになって以来、短期分析の景気循環理論においても生産性の計測が重要な課題のひとつとなっている。

本稿では、生産性を計測する方法として、1957年の Solow による先駆的な研究によって提示されたソロー残差について、その理論的背景を整理することを行う。Solow（1957）の分析は、生産量の変化率、要素投入量の変化率、および収入ベースによる労働分配率のデータから、TFP の変化率を測定する。しかしこの方法は、規模に関して収穫一定の技術であり、かつ市場が完全競争であるという条件を前提としている。言い換えれば、規模に関する収穫の程度が一定ではなかったり、市場が完全競争ではなく企業が価格支配力をもつ場合には、測定されるソロー残差は、TFP の変化率にバイアスを生じさせる。これらの指摘は、Hall (1988、1990) や Basu and Fernald (1995) によって行われた。

Hall (1988、1990) は、さまざまな規模に関する収穫の程度や市場の競争状態でも、コストベースシェアを分配率に使用し、また、分配率で加重平均した要素投入の変化率に収穫の程度を表す係数を考慮するという、修正をソロー残差に施すことによって、ソロー残差がTFPの変化率を測定することができることを示した。さらに、Basu and Fernald (1995) は、Hall (1988、1990) のように規模に関する収穫の程度が一定であるという仮定を緩め、かつ生産物市場が完全ではない場合には、生産関数を、Solow (1957) や Hall (1988、1990) での分析で行われた付加価値ベースではなく粗生産額ベースに変更することによって、ただしくTFPの変化率を測定することができることを指摘している。

次節では、Solow (1957) の分析を整理することを通じて、TFPの変化率をソロー残差によって測定することが妥当となる前提条件を整理する。3節では、Hall (1990) の拡張を整理する。4節は、Basu and Fernald (1995) による修正を整理する。最後に結論を述べる。

2　Solowの分析

Solow (1957) は、その先駆的な研究により、TFPの測定を試みた。彼の分析の枠組みを以下に示す。Solowは、企業が競争的であり、かつ生産要素に関して一次同次の生産関数

$$Q_t = A_t F(K_t, N_t) \tag{1}$$

で財を生産していると仮定する。ここで、Q_tは産出量、K_tは資本投入量、N_tは労働投入量を表す。技術を表すA_tは、資本と労働から中立であるという意味でHicks中立的な技術を仮定している。この設定のもとで、技術の変化はどのように表されるであろうか。

企業が解くべき問題は次に表される。

$$\max \Pi_t = p_t Q_t - (r_t K_t + w_t N_t)$$
$$\text{s.t. } (1)$$

ここでΠ_tは利潤、p_tは生産物価格、r_tは資本の名目収益率、w_tは名目賃金率をそれぞれ表す。一階の条件より、

$$\frac{\partial Q_t}{\partial K_t} = \frac{r_t}{p_t},$$
$$\frac{\partial Q_t}{\partial N_t} = \frac{w_t}{p_t}$$

を得るが、これはそれぞれの限界生産性に実質収益率および実質賃金率が等しくなるように資本量と労働量が選択されることを意味している。したがって、資本の弾力性と労働の弾力性はそれぞれ、その収入ベースの分配率に等しいことが導かれる。すなわち、

(2) $$\frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{Q}=\frac{rK}{pQ}\equiv\alpha_R^K,$$

(3) $$\frac{\partial Q}{\partial N}\frac{N}{Q}=\frac{wN}{pQ}\equiv\alpha_R^N$$

である。ここで、$\alpha_R^i\,(i=N,K)$ は i 要素の収入ベースシェアを表す。今、生産関数は規模に関して収穫一定であると仮定しているので、付論Aの議論より、

(4) $$\alpha_R^N+\alpha_R^K=1$$

が成立する。

さて、(1)式を全微分して、両辺を Q_t で割ると、

(5) $$\frac{dQ}{Q}=\frac{dA}{A}+\frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{Q}\frac{dK}{K}+\frac{\partial Q}{\partial N}\frac{N}{Q}\frac{dN}{N}$$

を得る。(5)式の関係をもとに、(2)、(3)、(4)式の関係より、

(6) $$\Delta q_t=\alpha_R^N\Delta n_t+(1-\alpha_R^N)\Delta k_t+\Delta a_t$$

が得られる。ここで $\Delta x_t=\ln X_t-\ln X_{t-1}\,(X=Q,A,K,N)$ であり、成長率に変換した変数である。つまり生産量の成長率は、技術の成長率、資本の分配率で加重した資本の増加率、労働への分配率で加重した労働投入の増加率の3つの変化率の和として表される。生産量、資本投入量、労働投入量、および労働分配率のデータを得られれば、本来観測不可能なはずの技術を

(6)' $$\Delta a_t=\Delta q_t-\{\alpha_R^N\Delta n_t+(1-\alpha_R^N)\Delta k_t\}$$

として測定することが可能となる。この技術の変化率 Δa_t はソロー残差と呼ばれ、TFPの伸び率である。競争市場であるという仮定と生産関数が規模に関して収穫一定であるという仮定から、弾力性の値を分配率の値で代替することが可能となり、ソロー残差を測定できる。ここでは生産関数の形状にさらなる仮定を設ける必要がない。

ここで、Solow（1957）によるTFPの動きのイメージを考えよう。今、生産関数は一次同次を仮定しているので、$\frac{Q_t}{N_t}=A_tF\left(\frac{K_t}{N_t},1\right)\equiv A_tf\left(\frac{K_t}{N_t}\right)$ である(1)。いまこの式を $\frac{K_t}{N_t}=\frac{K_0}{N_0}$、$A_t=A_0$ の近傍で一次近似すると、

$$(A_0+\Delta A_0)f\left(\frac{K_0}{N_0}+\frac{\Delta K}{\Delta N}\right)\cong A_0f\left(\frac{K_0}{N_0}\right)+\left.\frac{\partial(Q/N)}{\partial(K/N)}\right|_{\frac{K}{N}=\frac{K_0}{N_0}}\cdot\Delta\left(\frac{K}{N}\right)+\left.\frac{\partial(Q/N)}{\partial A}\right|_{A=A_0}\cdot\Delta A$$

である。両辺を $\frac{Q_0}{N_0}\left(\frac{K_0}{N_0};A_0\right)$ で割って整理すると、

$$\frac{\Delta(Q/N)}{Q/N}=\frac{\partial(Q/N)}{\partial(K/N)}\frac{K/N}{Q/N}\frac{\Delta(K/N)}{K/N}+\Delta a \tag{7}$$

が得られる。この関係は図１に表される。図１が示すように、Δa は $\frac{\overline{E_{01}E_0}}{Q_0/N_0}$ で表される。

ここで $\overline{K_0/N_0E_{01}}=\frac{Q_{0+\Delta}}{N_{0+\Delta}}-\frac{\partial(Q/N)}{\partial(K/N)}\Delta\left(\frac{K}{N}\right)$ であるので、$\overline{E_{01}E_0}=\frac{Q_{0+\Delta}}{N_{0+\Delta}}-\frac{Q_0}{N_0}-\frac{\partial(Q/N)}{\partial(K/N)}\Delta\frac{K}{N}=$

$\Delta\frac{Q}{N}-\frac{\partial(Q/N)}{\partial(K/N)}\Delta\frac{K}{N}$ である。したがって $\Delta a=\frac{\overline{E_{01}E_0}}{Q_0/N_0}=\frac{\Delta(Q/N)}{Q/N}-\frac{\partial(Q/N)}{\partial(K/N)}\frac{K_0/N_0}{Q_0/N_0}\frac{\Delta(K/N)}{K_0/N_0}$ となり、(7)式が得られる。ここでいう技術の変化は、例えば、教育による人的資本の増加など、生産関数をシフトさせるすべての要因を含んでいる[2]。

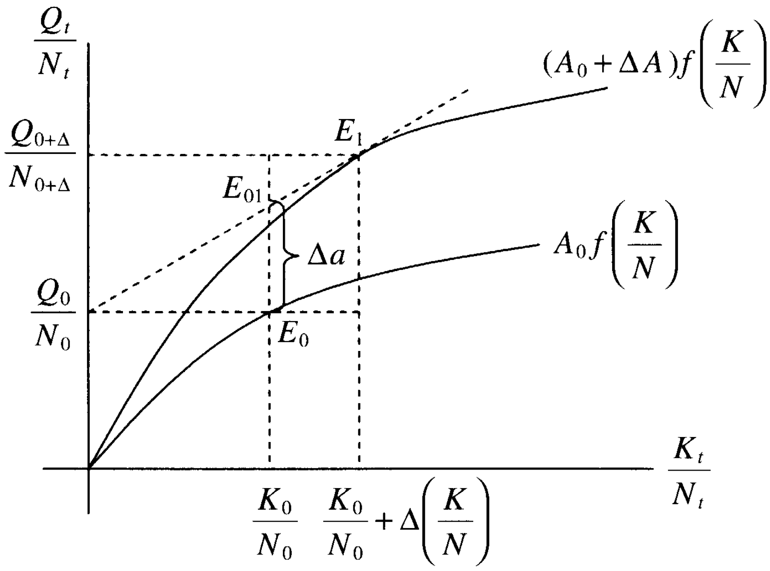

図１　ソロー残差の図的理解

3　Hall の展開

Hall（1988、1990）は、Solow（1957）によって導出された残差が、需要の増加や要素価格の変化といった要因を含んでおり、かならずしも生産関数のシフトをもたらす技術変化のみを捉えているわけではない点を指摘した。ある財に関して外生的に需要曲線が上方シフトしたとしよう。これは、取引される財の量を増加させることになるが、この現象自身は生産性を上昇させているわけではなく、同一の生産関数上を移動しているにすぎない。また、ある産業が生産に利用している生産要素の価格が急上昇したとしよう。これは、費用曲線をシフトさせることになり、取引

量は減少するが、生産性が変化したわけではない。

したがって、ソロー残差が技術変化のみを表すためには、価格に対して完全に弾力的な需要曲線を想定する必要がある。この想定のもとでは需要は変化しても需要曲線はシフトしないので、実現する産出量の変化は、技術の変化という供給サイドの要因によってのみ決定されることになる。このことの含意は、もし需要曲線が完全に弾力的でなければ、測定されるソロー残差は供給サイドの技術変化のみならず、需要サイドの選好の変化や要素価格の変化を含んでいる可能性があるということである。

先ほどの図1をみると、我々が観測できる点は、E_0と1期後のE_1の2点に過ぎない。したがって、上記の需要曲線のシフトや要素価格の変化によって、Aの変化が生じていない同一生産関数上の技術のもとで、要素投入量と生産量が変化したような、図2の例を考えてみても、観測される点が、やはりE_0と1期後のE_1の2点に過ぎないため、ソローの方法によって技術変化を計ると、図2のΔaの大きさとして導出されてしまう。したがって、もし需要曲線がシフトしたり、あるいは要素価格の変動が生じるような経済であれば、ソロー残差によって測られる技術変化は、真の技術変化とともに、需要曲線のシフトや要素価格の変化の影響をも含んでしまっていることになる。

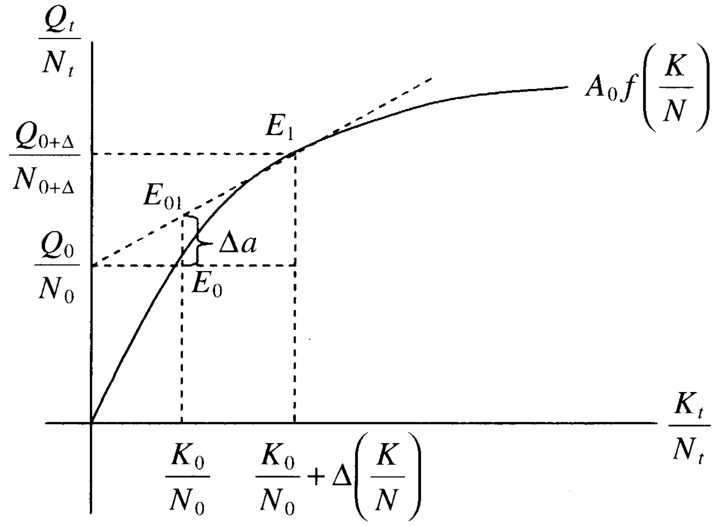

図2　生産関数のシフトがない場合に計測されるソロー残差

Hall（1988、1990）は、上記の問題点を指摘しつつも、Solowと同様に需要が完全に弾力的であるという仮定のもとで分析を行っている。そして、生産物市場が完全競争ではない場合と企業が保有する生産関数が規模に関して収穫一定ではない場合の拡張を考え、Solowによる分析に修正を加えている。生産物市場の競争状態と生産関数の規模に関する収穫の程度による、企業の操業可能性については、表1にまとめた[(3)]。したがって、生産物市場が不完全競争である場合の、規模に関する収穫の程度の3通りに関して、ソロー残差への影響を分析する必要がある。本稿で

表１　競争状態と規模に関する収穫の程度の違いによる操業可能性

生産物市場の競争の状態	規模に関する収穫の程度	操　業　可　能　性
完全	収穫一定	企業はゼロ利潤で操業を行う。(Solow の分析)
	収穫逓減	利潤を獲得するため必ず参入が生じ、長期的には産業の技術は規模に関する収穫一定として表される。したがって、長期的に収穫逓減は生じ得ない。
	収穫逓増	赤字が発生するため、企業は生産から退出する。
不完全	収穫一定	企業は価格支配力をもち、レントを得る。
	収穫逓減	企業は価格支配力をもち、レントを得る。
	収穫逓増	企業は、赤字分を補うだけの、あるいはレントを得るだけの価格支配力を保有する。

は、Hall の分析にならい、はじめに規模に関して収穫一定であるという仮定は維持されるが、生産物市場が完全ではなく市場支配力をもつケースをとりあげる。次に、生産物市場が不完全であり、かつ規模に関して収穫逓減や収穫逓増である場合を扱う。彼は、生産物市場が完全ではない場合に、各要素の弾力性の値として、収入ベースシェアではなく費用ベースシェアを用いるのが適当であることを示している。

3-1. ソロー残差の修正―企業が価格支配力をもち、かつ規模に関して収穫一定の技術を保有するケース―

本小節では、規模に関する収穫一定の仮定は維持しつつ、生産物市場が競争的であるという仮定を緩めた場合に、ソロー残差がどのように計測されるべきかを、Hall (1990) の分析に基づいて議論を行う。

生産物市場において、政府の参入規制などの方法で企業が価格支配力を保有している場合を考える。この場合、企業にレントが発生していると考えられる。価格支配力をもつため、企業は、市場で成立する価格 (p^*) を所与とせずに、利潤を最大にするように価格を決定する。例えば、生産物市場である企業が独占の場合を考えよう。この場合、図３が示すように、企業は、限界収入 (MR) が限界費用 (MC) に等しくなる Q を生産量として選ぶ。このとき、生産物価格は p となり、限界費用曲線上に位置しない。限界費用を p^C、マークアップ率を $\mu\ (\geq 1)$ とすると、$p = \mu \cdot p^C$ の関係が成り立つ。

さて、このように企業が価格支配力を持っている場合、各生産要素の弾力性はどのように表されるであろうか。費用最小化問題を考える。

$$\min C = wN + rK$$

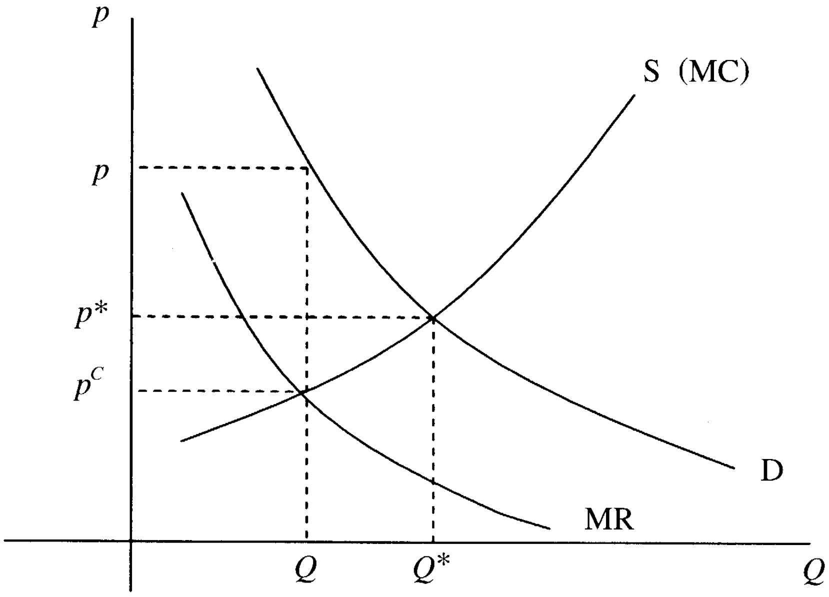

図３　生産市場で独占の場合の供給量の決定

$$\text{s.t.}\quad Q = A \cdot F(N, K)$$

ここでＣは総費用を表す。ラグランジュ関数は次式で表される。

$$\Lambda = wN + rK + \lambda\{Q - A \cdot F(N, K)\}.$$

λ はラグランジュ乗数である。$\dfrac{\partial \Lambda}{\partial N} = 0$ と $\dfrac{\partial \Lambda}{\partial K} = 0$ の一階の条件より

(8)
$$\frac{\partial Q}{\partial N} = \frac{w}{\lambda},\quad \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{r}{\lambda}$$

である。付論Ｂが示すように、λ は限界費用（p^c）に等しい。しかし、市場での生産物価格に等しいとは限らない。要素投入の生産に対する弾力性は、それぞれ

(9)
$$\frac{\partial Q}{\partial N}\frac{N}{Q} = \frac{wN}{p^C Q},$$

(10)
$$\frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{Q} = \frac{rK}{p^C Q}$$

として表される。限界費用を計測することは困難であるが、付論Ｃが示すように、規模に関する収穫一定の技術のもとでは、限界費用は平均費用に等しい。そのため

(11)
$$p^C = \frac{C}{Q} = \frac{wN + rK}{Q}$$

として、労働への支払いのデータに加え、資本の収益率に関するデータを用いることによって、計測することが可能になる。(9)、(10)式に、(11)式の関係を代入することにより、

(9)’
$$\frac{\partial Q}{\partial N}\frac{N}{Q}=\frac{wN}{C}\equiv\alpha_C^N,$$

(10)’
$$\frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{Q}=\frac{rK}{C}\equiv\alpha_C^K$$

となり、要素投入の弾力性を費用ベースのシェアによって表すことが可能になる。ここで、$\alpha_C^i\,(i=N,K)$ は i 要素の費用ベースシェアを表す。規模に関して収穫一定の生産関数のもとでは、付論Aの(A-2)’式より

(12)
$$\alpha_C^K+\alpha_C^N=1$$

が成り立つ。したがって、規模に関する収穫逓増が成り立ち、生産物市場が競争的でない場合、(5)式をもとにすると、

(13)
$$\Delta q_t=\alpha_C^N\Delta n_t+(1-\alpha_C^N)\,\Delta k_t+\Delta a_t$$

の関係が示される。

ここで、もし市場が完全競争ではないときにソロー残差を計測する際に、収入ベースの分配率を使用してするとどのような修正を必要とするのかを見てみよう。企業は、限界費用にマークアップ率 μ を掛けた値を価格として販売しているので、$p^c=\dfrac{p}{\mu}$ の関係が成り立ち、企業はその費用よりも大きい収入を得る。(9)、(10)式の弾力性は、

$$\frac{\partial F}{\partial N}\frac{N}{Q}=\frac{wN}{\lambda Q}=\mu\frac{wN}{pQ}=\mu\alpha_R^N,$$
$$\frac{\partial F}{\partial K}\frac{K}{Q}=\frac{rK}{\lambda Q}=\mu\frac{rK}{pQ}=\mu\alpha_R^K$$

として得られる。それぞれの弾性値ははそれぞれの収入ベースの分配率にマークアップ率をかけたものに等しい。つまり

(14)
$$\alpha_C^N=\mu\alpha_R^N,\ \alpha_C^K=\mu\alpha_R^K$$

である。収入ベースによる分配率は、労働、資本ともに、費用ベースシェアによる分配率よりも小さい。すなわち、

$$\text{費用ベースの労働分配率}\left(\frac{wN}{C}\right)>\text{収入ベースの労働分配率}\left(\frac{wN}{R}\right)$$

$$\text{費用ベースの資本分配率}\left(\frac{rK}{C}\right) > \text{収入ベースの資本分配率}\left(\frac{rK}{R}\right)$$

が成立している。そのため、収入ベースの分配率を利用してソロー残差を計算するためには、マークアップ率を用いて、

$$\Delta q_t = \mu\alpha_R^N \Delta n_t + (1-\mu\alpha_R^N)\Delta k_t + \Delta a_t \tag{15}$$

として計算する必要がある。(6)式によるソロー残差の計測は、労働分配率を過小評価し、資本分配率を過大評価するというバイアスが生じていることになる。

3-2. 規模に関する収穫の程度を緩和したときのソロー残差の修正

本小節では、規模に関する収穫一定が満たされないケースを考える。規模に関する収穫逓増の生産関数の場合、付論Aの(A-2)' 式より

$$rK + wN = \gamma \cdot pQ > pQ$$

という関係が成り立つ。$\gamma > 1$ であるので、要素支払いの費用が収入よりも多くなり、その限界費用に見合った要素支払いをすることは不可能となる。したがって、規模に関する収穫逓増である産業が操業を続けるためには、その企業が価格支配力を持つ必要がある。

さて、ここでの分析では、企業が総費用をまかなう収入を得るだけの価格支配力をもっているケースを考える。この場合、収入が総費用と等しくなるように価格が決定されレントは生じない。付論Cより、$MC = \gamma^{-1}AC$ が成り立つので、$\lambda = \gamma^{-1}\dfrac{C}{Q}$ である。したがって、労働の弾力性と資本の弾力性はそれぞれ次式に変形される。

$$\frac{\partial Q}{\partial N}\frac{N}{Q} = \frac{w}{\lambda}\frac{N}{Q} = \gamma\frac{wN}{C} = \gamma \cdot \alpha_C^N, \tag{16}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{Q} = \frac{r}{\lambda}\frac{K}{Q} = \gamma\frac{rK}{C} = \gamma \cdot \alpha_C^K. \tag{17}$$

付論Aの(A-2)' 式より $\dfrac{\partial Q}{\partial K}\dfrac{K}{Q} + \dfrac{\partial Q}{\partial N}\dfrac{N}{Q} = \gamma$ であるので、規模に関して収穫一定が成立していなくても、(12)式の関係が成立する。したがって、(5)式に基づいて、(16)、(17)式を用いると、規模に関して収穫一定が成立していない場合には、

$$\Delta q_t = \gamma[\alpha_C^N \Delta n_t + (1-\alpha_C^N)\Delta k_t] + \Delta a_t \tag{18}$$

という式によって、ソロー残差を計測することができる。収穫の程度を表す γ はパラメーターとして推定される。もし規模に関して収穫逓増であるときに、(13)式でソロー残差を求めると、得

られるソロー残差は過大に評価されることになる。

さて、今までの分析において、企業が規模に関する収穫一定のもとで独占利潤を得ているケースと、企業が規模に関する収穫逓増の生産関数のもとで総費用をまかなう収入を得るだけの価格支配力を保有しているケースを考えてきた。しかし、さらに次の２つのケースも考えられる。第１は、企業が規模に関して収穫逓増の生産関数を保有し、総費用をまかなう以上に高い価格設定を行って独占利潤を得ているケースである。第２は、企業が規模に関して収穫逓減の生産関数を保有しているケースである。この場合、利潤最大化行動を行うと、規模に関して収穫逓増の場合とは逆に、要素支払いの費用より収入が多くなるので、企業はその限界費用に見合った要素支払いをした後に、正の利潤をうけとることになる。正の利潤を受けとる産業には必ず参入が生じるので、長期的には規模に関して収穫一定となるはずである。したがって、長期的に規模に関して収穫逓減の領域で生産を行っているという背景には、参入規制などによるなんらかの規制が存在し完全競争ではないということがある。これらの２つのケースにおいては、規模に関する収穫の程度を表す γ は１以外の値をとり、かつマークアップ $\mu(>1)$ も生じている。さて、費用ベースシェアの分析は、企業が独占利潤を得ている場合にも用いることができた。そこで、これら２つのケースにおいても(18)式によって、ソロー残差を計測することができる。

以上の結果から、一般に、

(19)
$$\frac{\partial F}{\partial x_i}\cdot\frac{x_i}{Q}=\mu\alpha_R^i=\gamma\alpha_C^i$$

の関係を得る。したがって、$\dfrac{\mu}{\gamma}=\dfrac{Revenue}{Cost}$ である。つまり、$\mu>\gamma$ であれば、利潤が存在する。この大小関係は、γ が１よりも大きい場合も小さい場合も、また１に等しい場合も起こりうる。$\mu=\gamma$ であればゼロ利潤であるということである。ただし $\mu>1$ と考えられるので $\gamma\geq 1$ でもある。$\mu<\gamma$ の場合は、マークアップをしていても赤字が出ていることを意味するので、操業を継続する理由がない。そのためこのような関係が成り立つ状況は長期的には生じ得ない。

まとめると、費用ベースシェアを用いて(18)式によって推計すれば、競争的かつ規模に関して収穫一定の場合、もしくは競争的でなくて規模に関して収穫一定の場合には、$\gamma=1$ として求められ、規模に関して収穫逓増であれば競争的であってもなくても、$\gamma>1$ として求められる。規模に関して収穫逓減の場合は、競争的な状態は長期的に生じ得ないので、競争的ではないときに、$\gamma<1$ として求められることになる。したがって、規模に関する収穫の程度や生産物市場の競争状態にソロー残差の値が影響を受けることがないので、(18)式の費用ベースシェアを用いてソロー残差を測定することが望ましいといえる。

Hall（1990）や Caballero and Lyons（1992）は、(18)式によってアメリカ経済の規模に関する収穫の程度を分析している(4)。彼らの分析によると、規模に関する収穫の程度は１を超えており、

ソロー残差で測られるTFPの変動に対して、収穫逓増の影響があることを指摘している。

4　Basu and Fernaldの分析

Basu and Fernald（1995）は、企業が競争的に行動せず、規模に関する収穫の程度が一定ではない生産関数を想定すると、Solow（1957）やHall（1988、1990）が行ったように、付加価値を産出量としてソロー残差を計測するとバイアスが生じることを指摘し、粗生産額をその産出量として使用することを推奨した。以下では、競争と規模に関する収穫一定が成立しておらず、マークアップが存在している場合、中間投入が付加価値に直接影響を及ぼすことを示す。

Sato（1976）を参考にすると、Divisia指数は、

$$p^Y Y = p^Q Q + p^M M$$

である。ここでYを粗生産物、Qを付加価値、Mを中間投入であり、p^iはそれぞれiに関する価格である。両辺を全微分すると、

$$p^Y dY = p^Q dQ + p^M dM$$

である。整理すると、

$$p^Y Y \frac{dY}{Y} = (p^Y Y - p^M M)\frac{dQ}{Q} + p^M M \frac{dM}{M} \tag{20}$$

である。両辺を$p^Y Y$で割ると、

$$dy = (1 - s_R^M)dq + s_R^M dm$$

を得る。ここで$s_R^M \equiv \dfrac{p^M M}{p^Y Y}$であり、売り上げに占める中間投入額の割合を表す。書き換えると、

$$dq = \frac{1}{1 - s_R^M}dy - \frac{s_R^M}{1 - s_R^M}dm \tag{21}$$

である。あるいは、(20)式の両辺をで$\lambda^Y Y$割ると、マークアップ率$\mu^Y = \dfrac{p^Y}{\lambda^Y}$としてあらわすことにより、

$$\mu^Y dy = (\mu^Y - s_C^M)dq + s_C^M dm$$

を得る。ここで$s_C^M \equiv \dfrac{p^M M}{\lambda^Y Y}$であり、費用ベースでの中間投入額の割合を表す。書き換えると、

(22)
$$dq=\frac{\mu^Y}{\mu^Y-s_C^M}dy-\frac{s_C^M}{\mu^Y-s_C^M}dm$$

となる。

粗生産量の生産関数 $Y=f(Q(K,N),M;A)$ を全微分すると、

(23)
$$dy=\frac{\partial f}{\partial Q}\left\{\frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{Y}dk+\frac{\partial Q}{\partial N}\frac{N}{Y}dn\right\}+\frac{\partial f}{\partial M}\frac{M}{Y}dm+da$$

を得る。ここで A は、前述と同様に、Hicks 中立的な技術を表す。

はじめに、生産物市場が完全競争が成り立っている場合を考える。このとき、$\mu^Y=1$（すなわち $p^Y=\lambda^Y$）が成り立つので、

$$\frac{\partial f}{\partial M}\frac{M}{Y}=s_R^M=s_C^M$$

となり、(21)、(23) 式を用いると、収入ベースシェアで表記した付加価値の上昇率を表す式は

(24)
$$dq=\frac{1}{1-s_R^M}\left[\frac{\partial f}{\partial Q}\left\{\frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{Y}dk+\frac{\partial Q}{\partial N}\frac{N}{Y}dn\right\}+s_R^Mdm\right]-\frac{s_R^M}{1-s_R^M}dm-\frac{1}{1-s_R^M}da$$
$$=\frac{1}{1-s_R^M}\frac{\partial f}{\partial Q}\left[\frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{Y}dk+\frac{\partial Q}{\partial N}\frac{N}{Y}dn\right]-\frac{1}{1-s_R^M}da$$

として得られる。また、(22)、(23) 式を用いて費用ベースシェアで表記すると、

(25)
$$dq=\frac{1}{1-s_C^M}\left[\frac{\partial f}{\partial Q}\left\{\frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{Y}dk+\frac{\partial Q}{\partial N}\frac{N}{Y}dn\right\}+s_C^Mdm\right]-\frac{s_C^M}{1-s_C^M}dm-\frac{1}{1-s_C^M}da$$
$$=\frac{1}{1-s_C^M}\frac{\partial f}{\partial Q}\left[\frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{Y}dk+\frac{\partial Q}{\partial N}\frac{N}{Y}dn\right]-\frac{1}{1-s_C^M}da$$

である。また、生産物市場が完全競争であるので、

$$\frac{\partial Y}{\partial Q}\frac{Q}{Y}=\frac{p^QQ}{p^YY}=\frac{(p^YY-p^MM)}{p^YY}=1-s_R^M=1-s_C^M$$

が成り立つ。(24) 式もしくは (25) 式に上記の関係を代入すると

(26)
$$dq = \frac{1}{1-s_R^M}\frac{\partial f}{\partial Q}\frac{Q}{Y}\left[\frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{Q}dk + \frac{\partial Q}{\partial N}\frac{N}{Q}dn\right] - \frac{1}{1-s_R^M}da$$
$$= \frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{Q}dk + \frac{\partial Q}{\partial N}\frac{N}{Q}dn - \frac{1}{1-s_R^M}da$$

を得る。したがって、生産物に関して完全競争が成立している場合、中間投入は、資本や労働にかかわる値になんら影響を及ぼさない。ただし、求められたソロー残差は、真の技術進歩率に$\frac{1}{1-s_R^M}$分のバイアスが生じていることになる。

次に、生産物市場において完全競争が成立していない場合を考える。このとき、中間投入の粗生産物に対する弾力性は

$$\frac{\partial f}{\partial M}\frac{M}{Y} = \frac{p^M}{\lambda^Y}\frac{M}{Y} = \mu^Y s_R^M = s_C^M$$

として表される。(21)、(23) 式を用いると、収入ベースシェアで表記した付加価値の上昇率は

(27)
$$dq = \frac{1}{1-s_R^M}\frac{\partial f}{\partial Q}\left[\frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{Y}dk + \frac{\partial Q}{\partial N}\frac{N}{Y}dn\right] + \frac{(\mu^Y-1)s_R^M}{1-s_R^M}dm - \frac{1}{1-s_R^M}da$$

である。また (22)、(23) 式を用いて、費用ベースシェアで表記すると、

(28)
$$dq = \frac{\mu^Y}{\mu^Y - s_C^M}\frac{\partial f}{\partial Q}\left[\frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{Y}dk + \frac{\partial Q}{\partial N}\frac{N}{Y}dn\right] + \frac{(\mu^Y-1)s_C^M}{\mu^Y - s_C^M}dm - \frac{1}{\mu^Y - s_C^M}da$$

という関係が成り立つ。生産物市場が不完全競争であるので、

$$\frac{\partial Y}{\partial Q}\frac{Q}{Y} = \frac{p^Q Q}{\lambda^Y Y} = \frac{(p^Y Y - p^M M)}{\lambda^Y Y} = \mu^Y(1-s_R^M) = \mu^Y - s_C^M$$

である。(27) 式にこの関係を代入すると

(27)'
$$dq = \frac{1}{1-s_R^M}\frac{\partial f}{\partial Q}\frac{Q}{Y}\left[\frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{Q}dk + \frac{\partial Q}{\partial N}\frac{N}{Q}dn\right] + \frac{(\mu^Y-1)s_R^M}{1-s_R^M}dm - \frac{1}{1-s_R^M}da$$
$$= \mu^Y\left[\frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{Q}dk + \frac{\partial Q}{\partial N}\frac{N}{Q}dn\right] + \frac{(\mu^Y-1)s_R^M}{1-s_R^M}dm - \frac{1}{1-s_R^M}da$$

である。費用ベースシェアでみると、(28) 式を用いて、

(28)'
$$dq=\frac{\mu^Y}{\mu^Y-s_C^M}\frac{\partial f}{\partial Q}\frac{Q}{Y}\left[\frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{Q}dk+\frac{\partial Q}{\partial N}\frac{N}{Q}dn\right]+\frac{(\mu^Y-1)s_C^M}{\mu^Y-s_C^M}dm-\frac{1}{\mu^Y-s_C^M}da$$
$$=\mu^Y\left[\frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{Q}dk+\frac{\partial Q}{\partial N}\frac{N}{Q}dn\right]+\frac{(\mu^Y-1)s_C^M}{\mu^Y-s_C^M}dm-\frac{1}{\mu^Y-s_C^M}da$$

と表される。したがって、もし生産物市場が不完全であれば、収入ベースシェアと費用ベースシェアのどちらで測っても、付加価値の上昇率は、マークアップ率を考慮するだけでは十分にバイアスを修正できず、中間投入の変化率の影響を受けることになる。さらに、求められるソロー残差は真の技術進歩率に $\frac{1}{\mu^Y-s_C^M}$ の大きさのバイアスが生じていることになる。

$Y=f(Q(K,N),M;A)$ が K,N,M に関して γ 次同次関数であるとしよう。このとき、付論Cの関係より、$MC=\gamma^{-1}AC$ であるので、

$$\frac{\partial f}{\partial K}\frac{K}{Y}=\frac{rK}{\lambda^Y Y}=\gamma\frac{rK}{rK+wN+p^M M}=\gamma\cdot\omega_C^K,$$
$$\frac{\partial f}{\partial N}\frac{N}{Y}=\frac{wN}{\lambda^Y Y}=\gamma\frac{wN}{rK+wN+p^M M}=\gamma\cdot\omega_C^N,$$
$$\frac{\partial f}{\partial M}\frac{M}{Y}=\frac{p^M M}{\lambda^Y Y}=s_C^M=\gamma\frac{p^M M}{rK+wN+p^M M}=\gamma\cdot\omega_C^M$$

が成り立つ。また、付論Aの(A-3)式を用いると、$\frac{\partial f}{\partial K}\frac{K}{Y}+\frac{\partial f}{\partial N}\frac{N}{Y}+\frac{\partial f}{\partial M}\frac{M}{Y}=\gamma$ であるので、$\omega_C^K+\omega_C^N+\omega_C^M=1$ の関係を満たす。(28)式より

(29)
$$dq=\frac{\gamma\cdot\mu^Y}{\mu^Y-\gamma\cdot\omega_C^M}[\omega_C^K dk+\omega_C^N dn]+\frac{(\mu^Y-1)\gamma\cdot\omega_C^M}{\mu^Y-\gamma\cdot\omega_C^M}dm-\frac{1}{\mu^Y-\gamma\cdot\omega_C^M}da$$

を得る。$\mu^Y\omega_R^i=\gamma\omega_C^i\ (i=K,N,M)$ であるので、μ^Y に関して整理し(29)式に代入すると、

(29)'
$$dq=\frac{\gamma}{1-\omega_R^M}[\omega_C^K dk+\omega_C^N dn]+\frac{\gamma\omega_C^M-\omega_R^M}{1-\omega_C^M}dm-\frac{1}{1-\omega_R^M}da$$

が得られる。付加価値ではなく粗生産額をベースにした費用ベースシェアを利用し、規模の経済の程度（γ）を考慮しても、真の技術進歩率を測定することはできず、さらに中間投入の変化に中間投入の収入ベースシェアを掛けたものを考慮し、さらに求められたソロー残差を $(1-\omega_R^M)$ だけ割り引く必要がある。

一方、粗生産量を用いてソロー残差を求めることを考えると、(23)式より

(23)'
$$dy = \frac{\partial f}{\partial K}\frac{K}{Y}dk + \frac{\partial f}{\partial N}\frac{N}{Y}dn + \frac{\partial f}{\partial M}\frac{M}{Y}dm + da$$

であるので、粗生産関数が一次同次ではなく生産物市場において競争的でなくても、常に

(30)
$$dy = \gamma(\omega_C^K dk + \omega_C^N dn + \omega_C^M dm) + da$$

かつ $\omega_C^K + \omega_C^N + \omega_C^M = \gamma$ が成り立つ。この式を用いることにより、γ がパラメーターとして推定され、ソロー残差が正しく測定されることになる。

Basu and Fernald（1995）や Burnside（1996）、Vecchi（2000）は、粗生産量を用いてソロー残差を計測する（30）式によって、戦後のアメリカ経済の実証研究を行なっている[5]。彼らの研究では、規模に関する収穫の程度が1であることを導いており、Hall（1990）や Caballero and Lyons（1992）による結果が、バイアスをもった結果であることを指摘している。一方、日本に関しても、Miyagawa, Sakuragawa and Takizawa（2004）や Kawamoto（2004）が同様の研究をしている[6]。Miyagawa, Sakuragawa and Takizawa (2004) では、規模に関する収穫は一定であるという結果を導いているが、Kawamoto（2004）は耐久財生産業に関しては規模に関して収穫逓増が見られるという結果を得ており、日本の計測においては統一した見解は得られていない。

5　終わりに

本稿では、TFP の変化率を測定する方法として、Solow（1957）によって示されたソロー残差について、その導出と理論的前提を整理した。彼の分析によれば、完全競争であり、生産関数が規模に関して収穫一定である場合、ソロー残差は、生産量の変化率、要素投入量の変化率、および労働分配率のデータを用いることによって、TFP の変化率を導出する。一方で、完全競争市場が成り立たず、規模に関して収穫一定ではない場合には、Solow（1957）による方法は妥当しない。Hall（1988、1990）や Basu and Fernald（1995）は、このようなより一般的な場合においても、TFP の変化率を測定することができるソロー残差を構築した。その結果、粗生産額に関する生産関数を用い、コストシェアベースの分配率を用いることによって、規模に関する収穫の程度をパラメーターとして推定するとともに、TFP の変化率であるソロー残差を導出することが可能であることが示された。

しかしながら、これらの方法によって求められるソロー残差は、生産関数のシフトによってあらわされる技術進歩だけではなく、価格の変動をもたらす需要の変化による影響も含まれていることを把握しておくことが重要であろう。今後は、産業部門ごとの推計を行なう場合の生産物価格の影響を検討したい。産業ごとの推計を行なう場合には、要素価格の実質化を行なう物価水準と各産業の生産物価格に乖離が生じているため、その乖離がソロー残差の測定になんらかの影響

を及ぼす可能性が考えられる。例えば、90年代の日本の価格の動きをみると、一般物価水準の動きに比べ、IT 関連商品の価格下落に象徴されるように製造業の生産物価格の下落は大きい。したがって、この影響を理解することは、日本の90年代の TFP の動きを理解する上で重要であると考える。

付論A　γ 次同次生産関数の性質

関数 $F(x_1, x_2)$ に関して

(A-1) $$F(zx_1, zx_2) = z^{\gamma} F(x_1, x_2)$$

の関係が成り立つとき、この関数は、x_1、x_2に関して γ 次同次であると定義される。(A-1) 式の両辺を z で微分すると、$\frac{\partial F}{\partial zx_1}\frac{\partial zx_1}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial zx_2}\frac{\partial zx_2}{\partial z}=\gamma z^{\gamma-1}F(x_1, x_2)$ であるので、$z=1$とすると、

(A-2) $$\frac{\partial F}{\partial x_1}x_1+\frac{\partial F}{\partial x_2}x_2=\gamma\cdot F(x_1, x_2)$$

である。両辺を $F(x_1, x_2)$ で割ると、

(A-3) $$\frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{x_1}{F(x_1, x_2)}+\frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{x_2}{F(x_1, x_2)}=\gamma$$

となり、要素の弾力性の和が関数の次数に等しいことが導かれる。

生産関数 $Q=F(K, N)$ が γ 次同次であるとする。ここで、$x_1=K$、$x_2=N$ である。(A-2) 式より、

(A-2)' $$\frac{\partial F}{\partial K}K+\frac{\partial F}{\partial N}N=\gamma\cdot F(K, N)$$

である。

生産物市場が完全競争市場であるときに企業が利潤最大化行動をとると、$\frac{\partial F}{\partial K}=\frac{r}{p}$ と $\frac{\partial F}{\partial N}=\frac{w}{p}$ の関係が成り立つ。ここで、p、r、w はそれぞれ生産物価格、資本の名目収益率、名目賃金率である。この関係を利用すると、(A-2)' 式は、$rK+wN=\gamma\cdot pQ$ と変形でき、投入要素への分配（費用）が収入の γ 倍に等しいことを意味している。したがって、γ の大きさによって、収入と分配に次のような3つの関係が成り立つ。(1) $\gamma=1$、すなわち、規模に関して収穫一定である場合、分配と収入は等しくなり、企業の収入はすべて要素投入への支払いに用いられることになる。(2) $\gamma<1$、すなわち、規模に関して収穫逓減である場合、収入が分配よりも大きく企業に正の利潤が発生していることを意味する。(3) $\gamma>1$、すなわち、規模に関して収穫逓増の場合、収入よりも分

配が多い。したがって、限界生産物に等しい報酬を要素投入に対して支払うことはできないので、その企業は生産から撤退することになる。もし企業が収穫逓増の領域で生産を継続しているのであれば、その企業は独占でなければならない。

付論B　ラグランジュ乗数と限界費用の関係

西村（1990）に基づいて、以下を示す。

費用最小化問題は次のように表される。

$$\min_{x_1, x_2} \quad w_1x_1 + w_2x_2$$
$$\text{s.t.} \quad Q = F(x_1, x_2)$$

ここで、$x_i\,(i=1, 2)$ は生産要素であり、$w_i\,(i=1, 2)$ は対応する生産要素の価格である。また Q は生産量を表す。ラグランジュ関数は、

$$L = w_1x_1 + w_2x_2 + \lambda\{Q - F(x_1, x_2)\}$$

である。ここで、λ はラグランジュ乗数である。$\dfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0\ (i=1,2)$ という F.O.C. より $w_i = \lambda \dfrac{\partial F}{\partial x_i}$, $(i=1,2)$ を得る。両辺に dx_i を掛け、$i=1, 2$ に関して足すことにより、

$$w_1dx_1 + w_2dx_2 = \lambda\left\{\frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}dx_2\right\} \tag{B-1}$$

が得られる。

一方、

$$dy = \frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}dx_2,$$
$$dc = w_1dx_1 + w_2dx_2$$

であるので、(B-1) 式にこれらの関係を代入すると $\lambda = \dfrac{dc}{dy}$ となり、限界費用がラグランジュ乗数に等しいことがわかる。この関係は、生産関数の形状に依存しない。

付論C　平均費用と限界費用の関係

生産関数が一般的なコブ・ダグラス型である場合の費用最小化問題は次式である。

$$C(w_1, w_2, Q) = \min_{x_1, x_2} w_1x_1 + w_2x_2$$
$$s.t. \quad Ax_1^a x_2^b = Q$$

このとき、$a+b=\gamma$ であり、$\gamma=1$ であることに限定しない。このとき、費用最小化問題は、

$$\min_{x_1} w_1x_1 + w_2A^{-\frac{1}{b}}Q^{\frac{1}{b}}x_1^{-\frac{a}{b}}$$

として書き換えられる。F.O.C. より $w_1 - \dfrac{a}{b}w_2A^{-1/b}Q^{-1/b}x_1^{-\gamma/b} = 0$ である。従って、x_1 の条件付需要関数は、

$$x_1(w_1, w_2, Q) = A^{-1/\gamma}\left[\frac{aw_2}{bw_1}\right]^{b/\gamma}Q^{1/\gamma}$$

であり、x_2 の条件付需要関数は、

$$x_2(w_1, w_2, Q) = A^{-1/\gamma}\left[\frac{aw_2}{bw_1}\right]^{-a/\gamma}Q^{1/\gamma}$$

である。したがって、費用関数は、

$$\begin{aligned} C(w_1, w_2, Q) &= w_1x_1(w_1, w_2, Q) + w_2x_2(w_1, w_2, Q) \\ &= \hat{a}w_1^{a/\gamma}w_2^{b/\gamma}Q^{1/\gamma} \end{aligned}$$

としてあらわされる。ここで、$\hat{a} \equiv A^{-1/\gamma}\left[\left(\dfrac{a}{b}\right)^{b/\gamma} + \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-a/\gamma}\right]$ である。この費用関数を利用すると、平均費用 $AC = \hat{a}w_1^{a/\gamma}w_2^{b/\gamma}Q^{(1-\gamma)/\gamma}$、限界費用 $MC = \dfrac{1}{\gamma}\hat{a}w_1^{a/\gamma}w_2^{b/\gamma}Q^{(1-\gamma)/\gamma}$ を導出することができる。したがって限界費用と平均費用の間には

(C-1)
$$\gamma \cdot MC = AC$$

の関係が成り立つ。一般的に $MC \neq AC$ である。

しかし、生産関数が一次同次のときは、$\gamma = 1$ であるので、費用関数は $C(w_1, w_2, Q) = \tilde{a}w_1^aw_2^{1-a}Q$ として表される。ここで $\tilde{a} \equiv \left(\dfrac{a}{b}\right)^{1-a} + \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-a}$ である。したがって、生産関数が一次同次関数の場合は $MC = AC(= \tilde{a}w_1^aw_2^{1-a})$ が成立する。

注

(1) 一次同次関数であるので、付論 A の (A-1) 式に、$\gamma = 1$、$z = \dfrac{1}{N}$ を用いると $\dfrac{Q}{N} = AF\left(\dfrac{K}{N}, 1\right)$ が導出される。

(2) Solow (1957) の分析では、$\dfrac{Q_t}{N_t}$ として、労働時間あたりの民間非農業部門の実質 GNP の時系列データ

を用いている。彼によれば、政府部門を除いたのは、政府部門の生産の測定に関する問題を避けるためであり、農業部門を除いたのは、生産関数の一次同次性の可能性を高めるためである。データはアメリカの1909年から1949年の50年間である。さらに、各年の財産所得（property in income）のシェア α_t^K と $\frac{K_t}{N_t}$ のデータを利用して、Δa_t を計算した。彼は、導出した Δa_t が $\frac{K_t}{N_t}$ と無相関であること、及び Δa_t が時間を通じてランダムであることから、Hicks 中立的な技術を正当化している。

(3) 生産要素市場が不完全競争である場合には、表1の限りではない。例えば、生産要素の価格が産業全体の生産量増加とともに上昇する場合、市場の長期供給曲線は右上がりになる。また、生産要素の価格が産業全体の生産量増加とともに減少する場合は、価格を所与として行動すると、利潤が負となるので、完全競争市場の枠組みでは分析できない。

(4) 彼らは、(18)式にさらに、外部性をコントロールした式の推計を行なっている。

(5) Basu and Fernald（1995）や Burunside（1996）、Vecchi（2000）は、外部性や労働保蔵の影響もコントロールしている。

(6) Miyagawa, Sakuragawa and Takizawa (2004) では、外部性と労働保蔵の影響をコントロールしている。他方、Kawamoto（2004）は労働保蔵の影響をコントロールしている。

参考文献

西村和雄、1990、『ミクロ経済学』、東洋経済新報社

Base, S. and J. G. Fernald (1995) “Are Apparent Productive Spillovers a Figment of Specification Error?” *Journal of Monetary Economics*, vol.36, pp.165-188.

Burnside, C. (1996) “Production Function Regressions, Returns to Scale, and Externalities,” *Journal of Monetary Economics*, vol.37, pp.177-201.

Caballero, R. J. and R. K. Lyons (1992) “External Effects in U.S. Procyclical Productivity,” *Journal of Monetary Economics*, vol.29, pp.209-225.

Hall, R. E. (1998) “The Relation between Price and Marginal Cost in U.S. Industry,” *Journal of Political Economy*, vol.96, pp.921-947.

Hall, R. E. (1990) “Invariance Properties of Solow’s Productivity Residual,” edited by Peter Dianmond, *Growth/productivity/unemployment*, MIT, pp.71-112.

Kawamoto, T. (2004) “What Do the Purifies Solow Residuals Tell Us about Japan’s Lost Decade?” *Institute for Monetary and Economic Studies Discussion Paper Series* No.2004-E-5.

Miyagawa, T., Sakuragawa, Y. and Takizaki, M. (2004) “Produtivity and the Business Cycle in Japan -Evidence from Japanese Industry Data,” mimeo.

Solow R. (1957) “Technical Change and the Aggregate Production Function”, *The Review of Economics and Statistics*, vol.39, No.3, pp.312-320.

Sato K. (1976) "The Meaning and Measurement of the Real Value Added Index," *The Review of Economics and Statistics*, vol.58, pp.434-442.

Vecchi, M. (2000) "Increasing Returns, Labour Utilization and Externalities: Procyclical Productivity in the United States and Japan," *Economica*, vol.67, pp.229-244.