跡見学園女子大学マネジメント学部紀要　第 6 号　(2008 年 3 月 15 日)

非対称入札における諸問題

Problems in Asymmetric Procurement Auctions

丹　野　忠　晋*

要　旨

非対称オークションは対称オークションに比べて分析が難しく近年になるまで政策的なインプリケーションを含む研究は生れてこなかった．この論文では既存の文献から主要な定理をまとめ，さらに簡単なモデルによって対称性から逸脱すると発生する様々な問題を提示する．

key words: オークション, 入札市場, 非対称性.

JEL classifications : D44, H57.

1　はじめに

非対称オークションは対称オークションに比べて分析が難しく近年になるまで政策的なインプリケーションを含む研究は生れてこなかった．この論文では既存の文献から主要な定理をまとめ，さらに簡単なモデルによって対称性から逸脱すると発生する様々な問題と政策的な含意を検討する．均衡の存在問題の他にも入札関数の性質やオークション間の収入比較なども検討する．

Maskin and Riley (2000) [8] は弱い入札者と強い入札者の 2 種類の違った評価の分布や台を持った入札者がいることによって様々なオークション形式がどのように売り手の収入が変化するかを検討している．一般の n 種類のタイプのクラスへの拡張は，Li and Riley (2007) [5] が行っている．非対称オークションの均衡の存在問題は Lebrun (1996) [6] と Lebrun (1999) [7] が一般的に取り扱っている．明示的な解の導出や比較静学には困難を伴うが，そのうような時に威力を発揮する数値計算の手法は Bajari and Ye (2001) [2] と Li and Riley (2007) [5] が

* 跡見学園女子大学マネジメント学部准教授，競争政策研究センター客員研究員．mail: tanno@atomi.ac.jp
〒 352–8501 埼玉県新座市中野 1–9–6 跡見学園女子大学

開発を行っている[1]．

2　対称オークション

この節では対称オークションの微分方程式を直接解く方法を用いて均衡利得を求める．各企業 i は生産費用 c_i を持っている．それは共通の分布関数 F とその台 $[\underline{c}, \overline{c}]$ に従いかつすべての定義域で 0 ではない密度関数 f があるとする．ここで全ての企業はある費用 c に対して増加する戦略 $p(c)$ を持つとする．その時ある価格 p に関して逆関数 $c(p)$ が存在する．これを用いるとある代表的な企業の利得は以下のように定式化できる．

$$\pi(c) = max_p(p-c)(1-F(c(p)))^{N-1}.$$

この関数 c が微分可能であれば利潤最大化の 1 階条件は

$$-(p-c)(N-1)(1-F(c(p)))^{N-2}F'(c(p))c'(p) + (1-F(c(p)))^{N-1} = 0$$

となる．ここで

$$(p(1-F(c(p)))^{N-1})' = (1-F(c(p)))^{N-1} - p(N-1)(1-F(c(p)))^{N-2}F'(c(p))c'(p)$$

を用いて 1 階の条件を書き換えた上で

$$\begin{aligned}(1-F(c(p)))^{N-1} - p(N-1)(1-F(c(p)))^{N-2}F'(c(p))c'(p) = \\ -(N-1)(1-F(c(p)))^{N-2}F'(c(p))cc'(p)\end{aligned}$$

を p について $\overline{p} = p(\overline{c})$ から $p = p(c)$ まで積分すると以下の式になる．

$$p(c)(1-F(c(p)))^{N-1} = \int_{\overline{c}}^{c} (-(N-1)(1-F(x))^{N-2}F'(x)x)dx. \qquad (1)$$

右辺は部分積分を施して上端と下端を交換すると

$$\begin{aligned}&\int_{\overline{c}}^{c} (-(N-1)(1-F(x))^{N-2}F'(x)x)dx \\ &= \left[(1-F(x))^{N-1}x\right]_{\overline{c}}^{c} - \int_{\overline{c}}^{c} (1-F(x))^{N-1}dx \\ &= (1-F(c))^{N-1}c + \int_{c}^{\overline{c}} (1-F(x))^{N-1}dx\end{aligned}$$

となるので，(1) は以下の式になる．

$$(p-c(p))(1-F(c))^{N-1} = \int_{c}^{\overline{c}} (1-F(x))^{N-1}dx.$$

よって最適な入札戦略は

$$p(c) = c + \frac{\int_{c}^{\overline{c}}(1-F(x))^{N-1}dx}{(1-F(c))^{N-1}}$$

となる．

3 非対称オークション

このように対称オークションでは共通戦略に焦点を当てることにより1階の条件から部分積分のテクニックを用いて容易に解を求めることができる．非対称性ではこのような手法が用いることができないことを簡単な例で示そう．非対称オークションの詳細については Lebrun (1996) [6], Lebrun (1999) [7], Maskin and Riley (2000) [8], Bajari and Ye (2001) [2] を参考にされたい．

ここでは2人の入札者を考える．入札者1は c_1 の費用を持っている．その微分可能な分布関数は F_1 である．一方で入札者2は $c_2(\cdot)$ の逆入札関数を持っている．入札者2の費用の微分可能な分布関数は F_2 であるとしよう．入札者1の利得は，

$$\pi_1 = (p_1 - c_1)(1 - F_2(c_2(p_1)))$$

となり，利得 π_1 を最大にする1階の条件は

$$-(p_1 - c_1)F_2'c_2' + (1 - F_2) = 0.$$

である．対称性より $c_2(p)$ と $c_1(p)$ に関する連立微分方程式は以下のようになる．

$$\begin{aligned}-(p - c_1)F_2'c_2' + (1 - F_2) = 0,\\ -(p - c_2)F_1'c_1' + (1 - F_1) = 0.\end{aligned}$$

ただし F_2, F_2', F_1, F_1' は下記の境界条件を満たす定義域 $[p_*, p^*]$ 内の c_2 と c_1 で評価されている．境界条件は以下のようになる．

$$p_* : F_1(c_1(p_*)) = 0, \quad F_2(c_2(p_*)) = 0$$

$$p^* : \begin{cases} \bar{c}_1 = \bar{c}_2 & p^* = c_1(\bar{c}_1), p^* = c_2(\bar{c}_2), p^* = \bar{c}_1 = \bar{c}_2 \\ \bar{c}_1 < \bar{c}_2 & p^* = \min \operatorname{argmax}_p (p - \bar{c}_1)(1 - F_2(c_2(p))), c_1(p^*) = \bar{c}_1, c_2(p^*) = p^*. \end{cases}$$

どちらの微分方程式にも c_1 と c_2 が両方入っているので対称オークションで用いた手法で解くことができないことが分かる．

次に具体的な分布関数を与えて入札関数を解いてみる．両者の費用は一様分布に従っているが入札者1の方が効率的なケースを考察しよう．入札者1の分布の台は $[0, a]$ (ただし $a < 1$) であり，分布関数は $F_1 = c_1/a$ となる．一方，入札者2の分布の台は $[0, 1]$ であるとすると連立微分方程式は以下のようになる．

$$-(p - c_1)c_2' + (1 - c_2) = 0 \quad \text{および} \quad -(p - c_2)c_1' + (a - c_1) = 0.$$

境界条件を考慮しない微分方程式の解は

$$c_1(p) = 2p - \frac{2+a}{3} \quad \text{および} \quad c_2(p) = 2p - \frac{1+2a}{3}$$

となる．入札者 1 が付けられる最も高い価格は $p^* = (1+2a)/3$ となる．入札者 2 の費用が $c_2(p^*)$ を超える場合は入札に参加するインセンティブを持たない．境界条件を考慮した最終的な解は以下である．

$$c_1 = 2p - \frac{2+a}{3} \qquad (c_1 \in [0,a])$$

$$c_2 = \begin{cases} 2p - \frac{1+2a}{3} & (c_2 \in [0,(1+2a)/3]) \\ No & (c_2 \geq \frac{1+2a}{3}). \end{cases}$$

ただし No は入札に参加しないことを意味する．

逆入札関数から通常の形に戻すと高費用の入札者 2 の方がより低い価格を付けることが観察される．

$$p_1(c) = \frac{c}{2} + \frac{a+2}{6} > p_2(c) = \frac{c}{2} + \frac{2a+1}{6}. \tag{2}$$

これは非対称オークションの研究で様々な入札制度や対称性と非対称性を比較検討した Maskin and Riley (2000) [8] の Proposition 3.3 と合致する結果である．しかし，入札企業 2 の高い費用では入札を辞退する領域が現れている．このような入札関数は図 1 に描かれている．各々の利得は以下のようになる．

$$\pi_1(c) = \frac{(a+2-3c)^2}{18} \qquad \text{および} \qquad \pi_2(c) = \frac{(2a+1-3c)^2}{18a}$$

ただし，$\frac{-a+1}{3} \leq c \leq \frac{2a+1}{3}$ が満たされているものとする．

ここで一般的なケースの 1 階の条件と連立微分方程式を見てみる．入札企業が N 人の場合の 1 階の条件は以下に与えられる．

$$-(p_i - c_i)\sum_{j \neq i} F_j' c_j' \Pi_{k \neq i,j}(1-F_k) + \Pi_{j \neq i}(1-F_j) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, N).$$

ただし F_j', c_j', F_k は p_i, $c_j(p_i)$, $c_k(p_i)$ で評価されている．Lebrun (1999) [7] と Bajari and Ye (2001) [2] から各項を再整理すると以下の連立微分方程式に変換できる．

$$c_i' = \frac{1-F_i}{(N-1)F_i'}\left(\sum_{j \neq i} \frac{1}{p_j - c_j} - \frac{N-2}{p_i - c_i}\right) \qquad (i = 1, \ldots, N).$$

このような形式で解を得るための条件は Lebrun (1999) [7] によると以下のようになる．

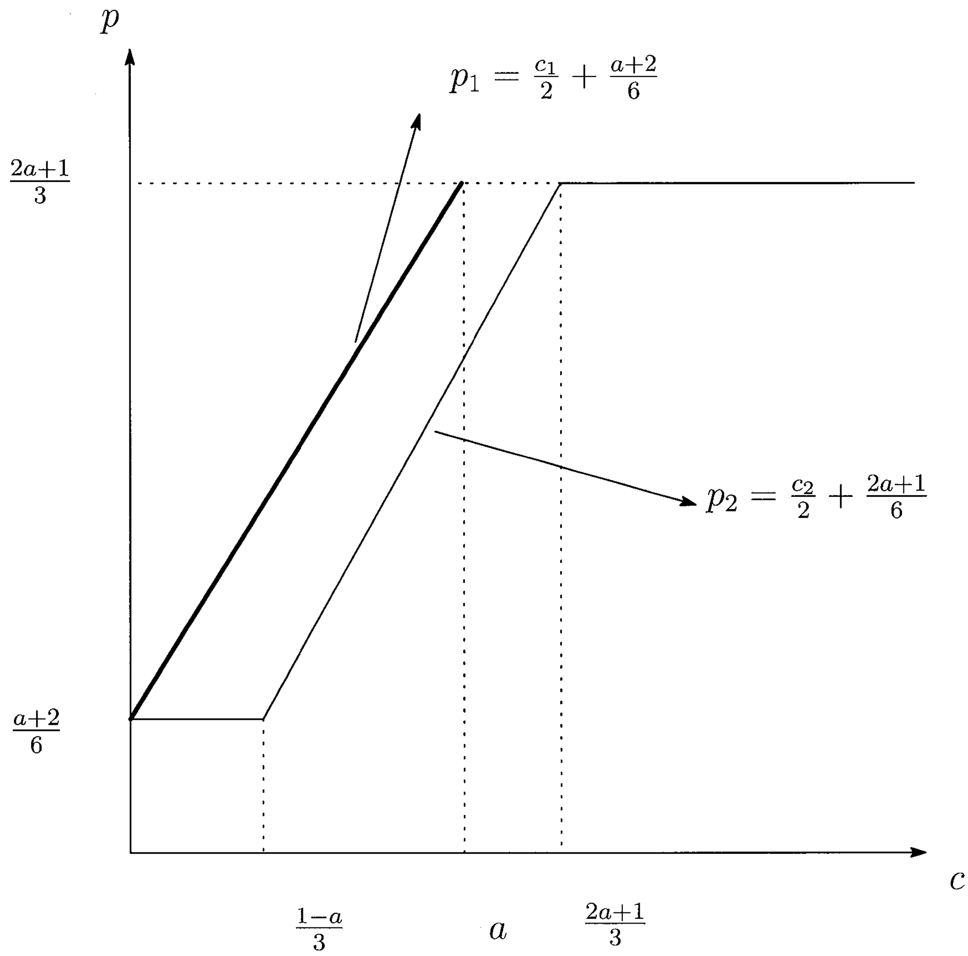

図 1　一様分布 2 入札業者ケースの入札関数

1. F_i は共通の台 $[\underline{c}, \overline{c}]$ を持つ

2. F_i は右から連続

3. F_i は $(\underline{c}, \overline{c}]$ 上で微分可能

4. F_i' は局所的に 0 より大きい

この仮定 1 はかなり強く前に見た例はこれを満たしていないが，その解は上の一般の微分方程式を満足している．対称オークションは 1 階の条件を変形して積分を行うことで解を導出できたのに対して，非対称性が現れるとこの形式の微分方程式を解く必要に迫られてその解の導出は困難を迫られる．

4　比較静学と経済厚生

非対称性が入ると前節の (2) で示されたように低いコストを持つ企業ほど高い価格を付ける傾向が出てくる．一般的な結論は Maskin and Riley (2000) [8] の Proposition 3.3 で示され

たが，そこでの重要な仮定が条件付確率優越 (conditional stochastic dominance) である．第 1 入札者の分布が第 2 入札者の分布を第 1 次確率優越するとは

$$F_1(c) \geq F_2(c) \qquad \text{ただし } c \in [\underline{c}_2, \overline{c}_1]$$

を意味する．ただし，$\underline{c}_2$ は第 2 入札者の分布の台の下限および $\overline{c}_1$ は第 1 入札者の分布の台の上限である．この概念をもっと強くした条件が条件付確率優越である．第 1 入札者は条件付確率優越の意味で第 2 入札者よりも「強い」とは以下の条件を満たすことである．

$$\frac{F_1'(c)}{F_1(c)} \geq \frac{F_2'(c)}{F_2(c)} \qquad \text{ただし } c \in [\underline{c}_2, \overline{c}_1]$$

このとき $\tilde{c}_i$ $(i = 1, 2)$ を確率変数とすると上式が成立する範囲の任意の $x < y$ について，

$$\Pr(\tilde{c}_1 \leq x | \tilde{c}_1 \leq y) \geq \Pr(\tilde{c}_2 \leq x | \tilde{c}_2 \leq y)$$

が成り立つ．我々の例では第 1 次確率優位と条件付確率優越が満たされている．

$$F_1(c) = \frac{c}{a} \geq F_2(c) = c \quad \text{および} \quad \frac{F_1'(c)}{F_1(c)} = \frac{1}{c} \geq \frac{F_2'(c)}{F_2(c)} = \frac{1}{c}.$$

そのため Maskin and Riley (2000) [8] の結論を当てはめることができる．すなわち強い入札者である第 1 入札者は封印入札よりも公開入札をより好み，弱い入札者である第 2 入札者は逆である．またこの例のように分布が縮んだケースでは公開入札の落札代金が封印入札のそれよりも低くなる．もう一度各入札者の利得を掲示する．

$$\pi_1 = \frac{(a + 2 - 3c_1)^2}{18} \qquad \text{for } c_1 \in [0, a]$$

$$\pi_2 = \begin{cases} \frac{a+2-6c_2}{6} & \text{for } c_2 \leq \frac{-a+1}{3} \\ \frac{(2a+1-3c_2)^2}{18a} & \text{for } \frac{-a+1}{3} < c_2 \leq \frac{2a+1}{3} \\ 0 & \text{for } \frac{2a+1}{3} < c_2. \end{cases}$$

買い手である政府は落札物件の公共的な価値 S を持っていてその費用は落札金額 p である．その費用は税金から賄われるので $\lambda \geq 0$ の社会的な費用が追加されるとしよう．よって社会厚生 W は

$$W = \mathbb{E}(S - (1 + \lambda)p^* + \pi_1 + \pi_2)$$

となる．競争的な場合の一般的な厚生と 2 入札者対称一様分布ケースでは以下のようにある．

$$W = N\pi(r) + \pi_B(s) = N \int_{\underline{c}}^{r} (S - (1 + \lambda)c - \lambda \frac{F(c)}{f(c)})(1 - F(c))^{N-1} f(c) dc$$

$$W = S - \frac{\lambda}{3}.$$

本論では非対称オークションの既存の研究をサーベイして簡単な例を持ってその難しさを明確にした．今後は入札の非対称性を有した一般的な理論モデルや入札談合への応用が期待される．様々な困難にも関わらず入札談合を防ぐためのヒントを含意するような理論モデルの構築が今後の課題であろう．

注

(1) その他の関連する文献として Arozamena and Cantillon (2004) [1], Bajari and Ye (2003) [2], Fibich, Gavious and Sela (2002) [3], Griesmer, Levitan and Shubik (1967) [4], Maskin and Riley (2003) [9] がある．

参考文献

[1] Arozamena, L. and E. Cantillon (2004), *Investment Incentives in Procurement Auctions*, Vol. 71 (1), pp.1–18.

[2] Bajari, P. and L. Ye (2003), "Deciding Between Competition and Collusion," *Review of Economics and Statistics*, 85, pp. 971–989.

[3] Fibich, G., A. Gavious and A. Sela (2002), "Low and High Types in Asymmetric First-price Auctions," *Economics Letters*, Vol. 75 (2), pp. 283–287.

[4] Griesmer, J.H., R.E. Levitan and M. Shubik (1967), "Towards a Study of Bidding Processes, part4: Games with Unknown Costs," *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol. 14, pp. 415–433.

[5] Li, H. and J.G. Riley (2007), "Auction Choice," *International Journal of Industrial Organization*, Vol. 25 (6), pp. 1269–1298.

[6] Lebrun, B. (1996), "Existence of an Equilibrium in First Price Auctions," *Economic Theory*, Vol. 7, No. 3, pp. 421–443.

[7] Lebrun, B. (1999), "First Price Auctions in the Asymmetric N Bidder Case," *International Economic Review*, Vol. 40, No. 1, pp. 125–142.

[8] Maskin, E. and J. Riley (2000), "Asymmetric Auctions," *Review of Economic Studies*, Vol. 67, pp. 413–438.

[9] Maskin, E. and J. Riley (2003), "Uniqueness of Equilibrium in Sealed High-Bid Auctions," *Games and Economic Behavior*, Vol. 45 (2), pp. 395–409.