跡見学園女子大学マネジメント学部紀要　第８号　（2009年９月15日）

# 非対称オークションとその収入

Asymmetric Auctions and Revenues

丹　野　忠　晋
Tadanobu TANNO

**要　旨**

収入等価定理の重要な仮定はオークションの対称性である．非対称オークションにおける収入の比較や明示的な解について最新の結果を概観するとともに，入札制度における今後の応用の可能性を考察する．特に２人一様分布のケースについてはほぼ解決したと言って良いのでこの理論を中心に非対称性がもたらす分析上の困難を把握する．

## 1　はじめに

オークションルールに違いはあれどもある条件が満たされれば，売り手の期待収入はすべて等しくなる．本論は，この有名な収入等価定理の幾つかの仮定のうちの入札者の対称性に焦点を当てる．非対称な入札者では厳密な意味での収入等価定理がもはや成り立たないだけでなく，明示的な均衡入札戦略を見いだすことも困難である．筆者は，丹野忠晋 (2008) において非対称オークションにおける問題を簡潔にまとめたが，本論ではそれを補完するとともに非対称性がもたらす売り手の期待収入への影響を近年の文献を中心に概観する．

最も一般的な収入等価定理を示したMyerson (1981) では最も売り手の期待収入が多くなる最適オークションを提示した．一般的にこの**最適オークション**は効率的ではない．即ち入札される財を最も評価する入札者が必ずしも確実に落札できるオークションメカニズムではない．Myerson (1981) は，非対称な一様分布を用いて財を評価している簡単なケースでその非効率性を例示している．２人の入札者でこのような最も簡単なケースにおいても**封印第一位価格オークション**の均衡入札戦略は導出が困難である．Griesmer, Levitan, and Shubik (1967) が最初に条件付きで均衡入札戦略を導出した．次にKaplan and Zamir (2007) は，２人の一様分布の一般的なケースにおけるGriesmer, Levitan, and Shubik (1967) の入札戦略を解くことに成功した[1)]．さらに

Tanno (2009) は，Kaplan and Zamir (2007) が同時に明らかにした線形戦略の存在をより一般的な条件で導き出した．Tanno (2009) は，期待収入と効率性の比較を線形戦略に限定した封印第一位価格オークションと他のオークションルール―第二位価格オークションと最適オークション―の間で行っている．

Griesmer, Levitan, and Shubik (1967), Kaplan and Zamir (2007) および Tanno (2009) の扱っている非対称性と比べてより小さな非対称性を持ったオークションで近似収入等価定理を証明したのが Fibich, Gavious, and Sela (2004) である．彼らは，摂動理論を援用して対称オークションに小さな動きが入って対称性が僅かに崩れた場合の収入を考察した．その小さな非対称性があってもオークション間の収入はほとんど同じであることを証明した．小さな非対称オークションの基礎は，２人の入札者の一様分布のケースとは異なるが，本論ではこれらが支えられている諸仮定を比較して問題点を明らかにするとともに，今後のこの分野の理論の展開の見通しを明確なものにしていきたい．以下の構成は次の通りである．第２節では一様分布の非対称オークションの均衡について論じる．第３節はその収入を分析する．第４節は小さい非対称性の近似収入等価定理を概略である．第５節は結論である．

## 2　一様分布の非対称オークション

この節では Tanno (2009) を参考に２ 人の入札者の財の評価が異なった一様分布に従っているケースの均衡入札戦略を紹介しよう．２ 人の入札者は $i = w$ (weak) と $s$ (strong) がいるとする．彼らはリスク中立的でその留保価格は０と基準化する．入札者 $i\ (= w, s)$ は，ある区間 $[l_i, h_i]$ 上の独立な一様分布 $F_i$ に従う財の価値 $v_i$ を持っているとする．一定の密度を $f_i$ とする．ここで $l_w \leq l_s$ と仮定する．最も高い価格を付けた入札者が財を得るが，同位の場合は等しい確率で財を入手できるものとしよう[2)]．買い手 $i$ が $b$ を付け値したときの彼が財を得る確率を $p_i(b)$ とする．

ベイジアン・ナッシュ均衡を求めるためにある入札額 $b$ から価値 $v$ への逆入札関数 $\phi_i(\cdot)$ を考察しよう．１階の条件から導かれる下記の連立方程式[3)]

$$\phi'_j(b)\,(\phi_i(b)-b)-(\phi_j(b)-l_j)=0 \qquad \text{for } i, j = s, w \text{ and } i \neq j$$

を解く必要がある．ここである解 $\phi_i$ に対して逆関数が存在したならば，それを $\beta_i$ とする．この簡単な連立方程式を解くのは非常に難しい．最初に Griesmer, Levitan, and Shubik (1967) が条件付きで均衡入札戦略を導出した[4)]．彼らは $[l_s, h_s] = [0, h_s]$ と $[l_w, h_w] = [0, h_w]$ のケースで

$$\phi_i(b) = \frac{2b}{1+c_i b^2} \qquad where \quad c_i = \frac{1}{h_i^2} - \frac{1}{h_j^2}$$

となることを示した[5)]．結局，入札戦略は次の通りになる．

$$\beta_i(v) = \frac{1}{c_i v}\left(1-\sqrt{1-c_i v^2}\right).$$

Kaplan and Zamir (2007) は，この均衡解を特殊ケースとして含む一般解をさらに一般的な条件の下で成り立つことを示した．その導出に際して売り手の留保価格である最低価格 $r$ の有無によって解が異なることを述べている．まず，彼らの解の仮定を述べよう．

**仮定2.1**　*1.* $\frac{l_w + l_s}{2} < h_w$,

*2.* $r < \min\{h_s, h_w\}$,

*3.* 勝つ確率が 0 ならば自分の評価を入札する．

最低価格が拘束的ではない時の均衡解は次のようになる．

**命題2.1**　条件 $r \leq (l_w + l_s)/2$ の下で均衡逆入札関数は次のように与えられる．

$$\phi_w(b) = l_w + \frac{(l_s - l_w)^2}{(l_s + l_w - 2b)\, c_w e^{\frac{l_s - l_w}{l_s + l_w - 2b}} + 4(l_s - b)},$$

$$\phi_s(b) = l_s + \frac{(l_s - l_w)^2}{(l_s + l_w - 2b)\, c_s e^{-\frac{l_s - l_w}{l_s + l_w - 2b}} + 4(l_w - b)},$$

$$where \quad c_w = -\frac{\frac{(l_s - l_w)^2}{h_w - l_w} + 4(\bar{b} - l_s)}{2(\bar{b} - \underline{b})} e^{\frac{l_s - l_w}{2(\bar{b} - \underline{b})}}, \quad c_s = -\frac{\frac{(l_s - l_w)^2}{h_s - l_s} + 4(\bar{b} - l_w)}{2(\bar{b} - \underline{b})} e^{\frac{l_s - l_w}{2(\bar{b} - \underline{b})}},$$

$$\underline{b} = \frac{l_s + l_w}{2}, \quad and \quad \bar{b} = \frac{h_w h_s - \left(\frac{l_s + l_w}{2}\right)^2}{(h_w - l_w) + (h_s - l_s)}.$$

ここで $\underline{b}$ と $\bar{b}$ は各々均衡最低と最高入札価額である．

このように複雑な解なので一般に入札関数を求めることは困難である．次に最低価格が拘束的な場合は次の命題となる．

**命題2.2**　条件$r > (l_w + l_s)/2$ 及び$r \neq l_s$ の下で均衡逆入札関数は次のように与えられる．

$$\phi_w(b) = l_w + \frac{(r-l_w)(r-l_s)}{b-l_s+(b-r)^{\frac{r-l_w}{(r-l_w)+(r-l_s)}}(b+r-(l_w+l_s))^{\frac{r-l_s}{(r-l_w)+(r-l_s)}}c_w},$$

$$where \quad c_w = -\frac{(h_w-r)(h_s-l_s)\left(\frac{(r-l_s+h_w-l_w)(r-l_w+h_s-l_s)}{(h_w-r)(h_s-r)}\right)^{\frac{r-l_w}{(r-l_w)+(r-l_s)}}}{(h_w-l_w)(r-l_w+h_s-l_s)}, \quad \underline{b} = m,$$

$$and \quad \overline{b} = \frac{h_w h_s - \left(\frac{l_s+l_w}{2}\right)^2}{(h_w-l_w)+(h_s-l_s)}.$$

ここで$\underline{b}$ と$\overline{b}$ は各々均衡実現最低と最高入札価額である．強い入札者の$\phi_s$と$c_w$ については上式の$s$ と$w$ の位置を取り替えた形が均衡入札戦略を形成する．

Kaplan and Zamir (2007) は，他に2 人一様非対称オークションにおける線形解についても議論を行っている．線形解は一般的に以下の形を取る．

$$\phi_i(b_i) = 2b_i - \frac{1}{3}l_i - \frac{2}{3}l_j \quad and \quad \beta_i(v_i) = \frac{1}{2}v_i + \frac{1}{6}l_i + \frac{1}{3}l_j. \tag{1}$$

彼らの仮定からその解の存在に条件は，以下のようになる．

**命題2.3**　解(1) が均衡になる必要十分条件は，

$$r = \frac{2l_s + l_w}{3} \qquad かつ \qquad h_w - r = h_s - l_s \tag{2}$$

である．

この条件は，線形均衡のためには留保価格が有効で各入札者の最大価値の入札額が一致していることと同値である．丹野(2009) はこの結果を緩めて留保価格が存在しない下でも成り立つことを証明した[6)]．上に紹介したKaplan and Zamir (2007) が用いた仮定と少し異なるので，以下にTanno (2009) の仮定からを紹介しよう．これらの入札関数から落札確率 $p_i(\beta_i(v_i)) = (3v_i - l_i - 2l_j)/3(h_j - l_j)$ を導くことができる．意味のある状況を分析するために$p_w(\beta_w(h_w)) > 0$であることを仮定しよう．それは以下の条件と同値である．

$$3h_w > l_w + 2l_s. \tag{3}$$

この条件がないと弱い入札者はどんな価値を持っていても落札することがない.

線形均衡解を保証する条件は，各々の入札者が最大価値を持っているときの付け値が一致することである．それは $\beta_s(h_s) = \beta_w(h_w)$ であり，すなわち

**仮定2.2**

$$l_s - l_w = 3\,(h_s - h_w) \tag{4}$$

を意味する．仮定2.1がこの仮定を満たすことに注意せよ．Tanno (2009) はKaplan and Zamir (2007) の結論を留保価格が存在しない場合にも当てはまることを示している.

**命題2.4**　線形入札(1) がどんなタイブレークルールについても均衡となる必要十分条件は，(4) である.

ここでどんなタイブレークルールに対しても成り立ち，かつ必要条件でもあることに注意されたい[7)].

次節以降，この線形入札関数を用いて様々なオークション制度との収入や効率性について比較する．議論の見通しを良くするために，各入札者の最大価値の差を $d := h_s - h_w$ とおく．仮定(4) より, 強い入札者の価値の下の端点は $l_s = l_w + 3d$ と表される．意味のある均衡の条件(3) よりこのパラメータの有効な領域は，以下のようになる.

$$0 \leq d < \frac{h_w - l_w}{2}\,. \tag{5}$$

例えば，$d = 0$ のケースは対称オークションに対応する．我々は $d$ が大きければ大きいほどこのオークションは非対称であるあるいは似通っていないと表現する.

## 3　一様分布の非対称オークションの収入比較

非対称性があるともはやオークション間の期待収入の均等は，成り立たない．この節では非対称オークションにおける線形均衡戦略は収入に対してどのような影響を及ぼすかを考察する．ここで各入札者の期待価値の和が一定という条件を課そう．対称的な台 $[l, h]$ に対して $[l_w, h_w] = [l - 3a, h - a]$ と $[l_s, h_s] = [l + 3a, h + a]$ 置く．この場合両者の価値の期待和は，対称・非対称にかかわらず $h + l$ となる. またパラメータ $a$ は(5) より $(h - l)/2 > a > 0$ を満たす. 簡単な比較により次の命題が証明できる.

**命題3.1**　対称オークションに価値の期待和が一定の下で非対称性を持ち込むと売り手の期待収入は増加する．

つまり売り手にとって価値にばらつきがあった方が望ましいのである．収入同値定理とこの命題から直ちに以下の系が導かれる．

**系3.1**　価値の期待和が一定の下で非対称オークションの収入は，対称な第二位価格オークションのそれよりも大きい．

この系は後にもっと一般化できることを示そう (命題3.2)．Cantillon (2008) は，非対称オークションの分布の幾何平均をベンチマークケースとして収入の比較を行った．Griesmer, Levitan, and Shubik (1967) の解で比較すると非対称オークションの場合の方が収入が小さくなる．ベンチマークや均衡入札の選択によって結果が変わる．収入の大小についてはっきりしたことが言えないことを示している．

**命題3.2**　非対称な環境において，第一位価格オークションの期待収入は第二位価格オークションのそれよりも大きくなる．

Maskin and Riley (2000) は，分布がshiftとstretching outと呼ばれる変化をした場合に同様の結論を得ている．本論の分布は彼らの仮定を完全には満たしてはいないが，強い入札者の分布は弱い入札者の分布からstretching outした形状に似ている．これは彼らの結論を一般化する可能性をほのめかしていると言えよう．

## 4　非対称オークションの近似収入同値定理

Griesmer, Levitan, and Shubik (1967), Kaplan and Zamir (2007), Cantillon (2008) および Tanno (2009) の扱っている非対称性と比べてより小さな非対称性を持ったオークションで近似収入等価定理を証明したのがFibich, Gavious, and Sela (2004) である．彼らは，摂動理論を援用して $n$ 人の対称オークションに小さな動きが入って対称性が僅かに崩れた場合の収入を考察した．ここで$R(\epsilon) = R(0) + \epsilon R'(0) + O(\epsilon^2)$ を売り手の期待収入とする．ただし，$R(0)$ は対称ケースの収入及び$R'(0)$ は非対称の最高次の効果である．このときR($\epsilon$)はオークションメカニズム間で独立になる．2次の効果はオークションによって変わるが，その効果は小さくオークション間の収入はほとんど同じである．小さな非対称オークションの仮定は，2人の入札者の

一様分布のケースとは異なるが，ここではこれらが支えられている諸仮定を比較してみよう．

仮定4.1

・入札者はリスク中立的である．

・各入札者 $i$ の価値は，共通の台 $[l, h]$ を持つ微分可能な分布 $F_i$ から独立に取り出される．

・最も高い付け値をした入札者が財を獲得する．

・最低の価値 $l$ を持っている入札者の余剰は0 である．

この場合に共通の台を持っているという仮定がTanno (2009) 達と異なっている．一様分布に限定したので台が異なっていないと非対称オークションにはならない．小さな摂動をどのように表現するのか以下に示そう．各入札者の分布は次のようになっているものとする．

$$F_i(v) = F(v) + \epsilon H_i(v),\ \ F(l) = 0,\ F(h) = 1,\ \ H_i(l) = H_i(h) = 0,\ \ |H_i| \leq 1.$$

ここで $\epsilon$ が非対称の程度の測度となる．このようなケースの分布は制約的ではない．例えば，各 $F_i$ に対して次のように定義することができる．

$$F = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i(v)}{n},\qquad \epsilon = \max_i \max_v |F_i - F|,\qquad H_i = \frac{F_i - F}{\epsilon}$$

このように分布を分解して　を小さくとると以下の命題が成り立つ．

**命題4.1**　任意のオークションメカニズムの売り手の期待収入は，$R(\epsilon) = R(0) + \epsilon R'(0) + O(\epsilon^2)$ の形で表現できる．

2 次の項$R''(0)$ はオークション間で異なるとこに注意せよ．しかし，それは副次的な効果しかもたらさず，従って小さい非対称性は本質的に収入が同値である．摂動理論は非対称分布の平均化についても威力を発揮する．

ここで $R[F_1, ..., F_n]$ を $F_1, ..., F_n$ の収入，$F_{avg} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i(v)}{n}$ を算術平均化された分布，$R_{sym}[R_{avg}]$ を$n$ 人の対称的なオークションの収入とする．

**命題4.2**　任意のオークションメカニズムの売り手の期待収入は，$R[F_1, ..., F_n] = R_{sym}[R_{avg}] + O(\epsilon^2)$ の形で表現できる．

証明は前の定理を直接利用する．Cantillon (2008) の幾何分布を用いた場合と対照的な結論となっている．このように平均に関しても収入が同一という強い結論が出ている．

## 5　おわりに

本稿では近年の非対称オークション理論の概略を掴んだ．もやは収入等価定理が成り立たないのみならず明示的な解の導出に困難をもたらすこの分野では進歩が遅いにも関わらず少しずつその未知のベールが破がされつつある．一様分布での明示的な解の導出を行ったKaplan and Zamir (2007) とTanno (2009) はより広い応用が期待できるだろう．しかし，Kaplan and Zamir (2007) の非線形解はかなり複雑である．実際の応用としては留保価格のないTanno (2009) がより汎用的である．収入の効果については意見の分かれるところである．Maskin and Riley (2000) でも一定の順序がつかなかった．Tanno (2009) では第一位価格オークションの収入の方が大きくなるというはっきりした結果を持った．平均化された分布では，Cantillon (2008) は幾何分布を用いて非対称オークションケースの方が低くなることを示している．Tanno (2009) は両者の価値の和が一定という条件で非対称の導入は，収入を増やすと論じている．Fibich, Gavious, and Sela (2004) は小さな非対称性では平均された分布とさほど変わらないことを立証した．様々なセッティングの違いがあるのでどの結論が一般的かは判別がつかない．しかしながら，対称での同一の収入からの逸脱がどのように起こるのか興味深いテーマである．この研究では明示的な解を導出できないのでそれを克服するのが問題の第一であろう．Fibich and Gavious (2003) やFibich, Gavious, and Sela (2004) が用いた摂動理論のような数値解析的な手法が有用ではないかと推察する．馴染みのある分布ではないかもしれないがはっきりとした解を導く努力は多くの研究者によって行われるだろう．それに加えて公共入札制度を分析する応用面も今後の発展として貴重である．Bajari and Ye (2003) では入札制度において共謀が行われれば必然的に非対称性が表れることを示している．入札談合をあつかったTanno (2008) ではKaplan and Zamir (2007) 型の非対称解を分析している．今後とも純粋なオークション理論と手を携えて応用も発展していくであろう．

この研究は，跡見学園女子大学・平成20年度海外留学の成果の一部である．留学のための研究費支給に深く感謝する．また特別研究助成費の成果も含まれている．本研究は科研費 (21530231) の助成を受けたものである。

注

1）　ここでは取り扱わないがPlum (1992) も少し異なった環境でこの問題を取り上げている．

2）　実は任意のタイブレークルールで線形戦略を保証できるが，込み入った扱いが必要なので本論では省略する．

3） 以下では簡単のために $i, j = s, w$ $and$ $i \neq j$ は省略する．

4） この解の応用として入札制度を分析したLee（2008）がある．

5） ここで $h_s = h_w = 1$ の時に均衡逆入札戦略は対称的な解 $\phi_s(b) = 2b$ になることに注意せよ．

6） この解から様々なことが分かる．このオークションが非対称ならば，弱い入札者は積極的に応札する．すなわち，実現された均衡入札 $b$ に対して $\phi_w(b) < \phi_s(b)$ が成り立つ．Maskin and Riley（2000）のProposition 3.3 と合致する結果である．

7） 丹野（2008）でも線形入札を扱っているがこの命題の方が正しい．

## 参考文献


[1] Bajari, P. and L. Ye (2003), "Deciding Between Competition and Collusion," *Review of Economics and Statistics*, Vol. 85, pp. 971–989.

[2] Cantillon, E. (2008), "The Effect of Bidders' Asymmetries on Expected Revenue in Auctions," *Games and Economic Behavior*, Vol. 62, No. 1, pp. 1–25.

[3] Fibich, G. and A. Gavious (2003), "Asymmetric First-rice Auctions - A Perturbation Approach," *Mathematics of Operations Research*, Vol. 28, No. 4, pp. 836–852.

[4] Fibich, G., A. Gavious and A. Sela (2004), "Revenue Equivalence in Asymmetric Auctions," *Journal of Economic Theory*, Vol. 115, No. 2, pp. 309–321.

[5] Griesmer, J.H., R.E. Levitan and M. Shubik (1967), "Towards a Study of Bidding Processes, part4: Games with Unknown Costs," *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol. 14, pp. 415–433.

[6] Kaplan, T. R. and S. Zamir (2007), "Asymmetric First-Price Auctions With Uniform Distributions: Analytic Solutions to the General Case," Mimeo.

[7] Lee, J.-S. (2008), "Favoritism in Asymmetric Procurement Auctions," *International Journal of Industrial Organization*, Vol. 26, No. 6, pp. 1407–1424.

[8] Maskin, E. and J. Riley (2000), "Asymmetric Auctions," *Review of Economic Studies*, Vol. 67, pp.413–438.

[9] Myerson, R. B. (1981), "Optimal Auction Design," *Mathematics of Operations Research*, Vol. 6, No. 1, pp.58–73.

[10] Plum, M. (1992), "Characterization and Computation of Nashequilibria for Auctions with Incomplete Information," *International Journal of Game Theory*, Vol. 20, No. 4, pp. 393–418.

[11] Tanno, T. (2008), "Ratifiable Collusion and Bidding Systems in Procurement," Mimeo.

[12] Tanno, T. (2009), "Linear bid in asymmetric first-price auctions," Mimeo.

[13] 丹野忠晋(2008),「非対称入札における諸問題」跡見学園女子大学マネジメント学部紀要，第6 号，pp. 133–139.